

繰り返しゲームにおける独裁的戦略の数理

上田 仁彦*

Mathematics of Autocratic Strategies in Repeated Games

Masahiko UEDA*

Repeated games have been used to analyze the rational decision-making of multiple agents in a long-term interdependent relationship. Recently, a class of autocratic strategies, called zero-determinant strategies, was discovered in repeated games, which unilaterally controls payoffs of players via enforcing linear relations between payoffs. In this study, we elucidate mathematical properties of zero-determinant strategies in the repeated Cournot oligopoly game, repeated games with continuously-relaxed action sets, and multichannel games. Our results can be useful when we apply zero-determinant strategies to realistic games.

1. 背景

ゲーム理論は複数のエージェントの合理的な意思決定を記述する数学的枠組みである。例えば、囚人のジレンマと呼ばれるゲームにおいては、2人の囚人は取り調べにおいて独立に協力が裏切りかを選択するが、このとき個人的な利益を最大化する行動（裏切り）が全体にとって望ましい結果（相互協力）とは一致しない状況となっている。一方、同じゲームを無限回繰り返す繰り返し囚人のジレンマゲームにおいては、プレイヤーは長期的な利益を考慮ようになるため、相互協力が合理的な（自分の利益を最大化する）行動の結果として実現されることが知られている（1）。

近年、この繰り返しゲームにおいて「ゼロ行列式(ZD)戦略」と呼ばれる新しい戦略クラスが発見された（2）。ZD戦略はプレイヤーの利得を一方的に制御するような独裁的な戦略クラスである。繰り返し囚人のジレンマにおいては、このクラスには、相手の利得を一方的に固定する戦略や、絶対に負けない戦略など、直観に反する戦略が数多く含まれる。数理生物学の分野では、協利行動の進化におけるこのZD戦略の意義が頻りに議論され、特定のZD戦略は相互協力を創発することが知られてきた（3）。また、本来は繰り返し囚人のジレンマにおいて発見されたZD戦略をより一般的な状況に適用するために、適用範囲の拡張や利得制御能力の拡張がなされてきた。さらには、ZD戦略を情報通信技術の諸問題や人間行動の解析に用いる応用研究も数多くなされてきた。

以上のようにZD戦略の拡張の可能性や応用先は徐々に明らかになっている一方で、その数学的な一般的な性質には未だ未解明な部分を数多く残している。そこで本研究では、ZD戦略の数学的性質の理解の深化を目的とする。

2. 研究課題

本研究では3つの課題に取り組んだ。

【課題1】クールノー寡占ゲームにおけるZD戦略の存在とその意義の解明

クールノー寡占ゲームは寡占市場の最も単純なモデルである（1）。プレイヤーはある財の生産量を定めるが、財の価格は全員の生産量に単調減少的に依存するため、ゲーム理論的な状況となる。この寡占市場においてZD戦略の存在を調査する。具体的には、自分の利得を制御する戦略、他プレイヤーの利得を制御する戦略、自分の利得と他プレイヤーの利得に正の相関を課す戦略、の存在を検証する。特に、自分の利得と他プレイヤーの利得に正の相関を課す戦略に関しては、もし存在するならばプレイヤーの結託した独占を促進する役割があると考えられるので、簡単なシミュレーション設定でその触媒的役割を数値的に確認する。

【課題2】連続緩和されたゲームにおけるZD戦略の存在とその意義の解明

ゲームにおいて、行動そのものではなく各行動を取る確率を指定することは「混合戦略を用いる」（1）と表現されるが、これは最適化の分野における「連続緩和」と同種の考え方である。連続緩和は最適化問題における制約を緩和することにより、解くのが簡単な問題に帰着することを目的とする。本研究ではこの連続緩和されたゲームにおいてZD戦略の

存在条件を議論する。特に、連続緩和する前のゲームにおける ZD 戦略の存在条件と比べて、存在条件がどのように緩和されるかを理論的に明らかにすることを目指す。また、ゲーム理論において混合戦略を用いることでナッシュ均衡点（全員の合理的な戦略の取束先）の存在がナッシュにより証明されたが、連続緩和されたゲームにおける ZD 戦略とこのナッシュ均衡点との関係を明らかにすることも本研究の目標の一つである。

【課題 3】多チャンネルゲームにおける ZD 戦略の存在条件の解明

多チャンネルゲーム (4) は同一のプレイヤーによって同時に並列的にプレイされる複数の繰り返しゲームである。例えば、家電メーカーが冷蔵庫の市場で戦うと同時に洗濯機の市場でも戦う、といった状況は多チャンネルゲームの一例となっている。近年、多チャンネルゲームにおける ZD 戦略の性質が議論されてきた (5)。しかしながら、文献 (5) で報告された ZD 戦略はいくつかのチャンネルにおける個別の ZD 戦略を利用した自明なものしか報告されていない。本研究では多チャンネルゲームにおいて、各チャンネルに ZD 戦略の存在を仮定せずに多チャンネルゲームにおいて ZD 戦略を構成することは可能かを問う。

3. 結果

各課題に対して以下のような成果を得た。

【課題 1】クルノー寡占ゲームにおける ZD 戦略の存在とその意義の解明 (6)

まず、自分の利得と他の全ての相手の利得の平均の間に一方的に線形関係式を課す ZD 戦略が存在することがわかった。特に、その中には自分の利得と他の全ての相手の利得の平均を一方的に等しくする「公平な ZD 戦略」が存在することを示した。さらに、適応的に学習を行うエージェントに対する「公平な ZD 戦略」の性能を数値的に評価し、相手が 1 人の場合は共謀を促進するのに対し、相手が 2 人の場合は共謀を促進する力はないことを示した。

【課題 2】連続緩和されたゲームにおける ZD 戦略の存在とその意義の解明 (7)

行動空間の連続緩和によって存在可能な ZD 戦略の領域が拡大することを具体例の構成により示した。また、連続緩和されたある 1 つの行動を繰り返す「1 点 ZD 戦略」という概念を導入することにより、ジャンケンなどのいくつかの具体例においては、ナッシュ均衡の性質を 1 点 ZD 戦略の利得制御能力の観点から理解できることを示した。

【課題 3】多チャンネルゲームにおける ZD 戦略の存在条件の解明 (8)

まず、多チャンネルゲームにおける ZD 戦略の存在条件を各チャンネルにおける ZD 戦略の存在条件と関係づけた。その結果、一般に多チャンネルゲームにおける ZD 戦略の存在は少なくとも一つのチャンネルにおける ZD 戦略の存在を必要とすることがわかった。また、2 人対称ゲームにおいて 2 人の利得を一方的に等しくする公平な ZD 戦略に関しては、全てのチャンネルにおける公平な ZD 戦略の存在を必要とすることも示した。これらの結果は、多チャンネルゲームにおいて非自明な ZD 戦略を構成することは不可能であることを意味する。

4. 結論

本研究では ZD 戦略の数学的性質の解明を目指して 3 つの課題に取り組んできた。課題 1 では ZD 戦略はこれまでに研究されてきた領域 (社会的ジレンマなど) を超えて有用となりうる (場合によっては負の影響もありうる) ことを発見した。課題 2 では行動が連続値で表現されるような状況においては離散値のものに比べて多様な ZD 戦略が存在し得ることを発見した。課題 3 では多チャンネルゲームというゲームのクラスにおける ZD 戦略の存在に対する強い制約を発見することができた。これらの成果は ZD 戦略の有用性の研究のさらなる発展へと貢献すると期待される。

REFERENCES

- 1) 岡田 章, 「ゲーム理論」, 有斐閣 (2021).
- 2) W. H. Press and F. J. Dyson, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **109** (2012) 10409.
- 3) C. Hilbe, K. Chatterjee and M. A. Nowak, *Nature Human Behaviour*, **2** (2018) 469.
- 4) K. Donahue, O. P. Hauser, M. A. Nowak and C. Hilbe, *Nature Communications*, **11** (2020) 3885.
- 5) J. Shi, C. Chu, G. Fan, D. Hu, J. Liu, Z. Wang and S. Hu, *IEEE Transactions on Cybernetics*, **55** (2025) 776.
- 6) M. Ueda, S. Yagi and G. Ichinose, *PLOS Complex Systems*, **2** (2025) e0000081.
- 7) M. Ueda and A. Fujita, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **670** (2025) 130615.
- 8) M. Ueda, *Applied Mathematics and Computation*, **514** (2026) 129835.