

第 3 回海外留学報告書

笹木宏人*

2026 年 7 月

1 はじめに

豊田理研の海外大学院支援制度からご支援をいただいております笹木宏人と申します。2024 年の 9 月に Washington University in St. Louis (WashU) の数学科の PhD 課程に進学しました。専門は非可換幾何という分野で、大雑把にいうと作用素環論という微分積分の延長にある解析的な道具を用いて、従来の幾何学を新しい枠組みで捉えなおそう、ということをやっています。留学開始から 2 年がもうすぐ経ちますので、主にこれまでの研究や生活の様子についてまとめようと思います。何か質問がありましたら直接メールをいただければと思います。

2 研究について

少しずつ研究テーマも固まり、最近是指導教官と議論しながら研究を進めています。いくつか新しい結果も出てきて、それをまとめる作業もしているところです。ここでは少し研究の内容について紹介しようと思います。

2.1 研究の紹介

最近の研究テーマは、非可換幾何の中心的なテーマの一つである指数定理に関連しています。指数定理とは、大雑把にいうと、図形の形に関する情報と、その図形の上で定義された微分方程式の解に関する情報を結びつける定理です。例えば球面やドーナツのような図形には、穴の数や曲がり方のような幾何的・位相的な情報があります。一方で、その図形の上ではラプラシアンやディラック作用素と呼ばれる微分作用素を考えることができ、これは関数やベク

トル場がどのように変化するかを測る解析的な対象です。指数定理は、一見すると別々に見えるこれらの情報が、実は同じ量を二つの違う方法で見ているものだと教えてくれます。

代表的な Atiyah–Singer の指数定理では、ある種の微分作用素について、その微分方程式の解空間の次元として定義される解析的な量が、図形の幾何的な量と一致することが示されます。典型的には、性質の良い図形 X 上の微分作用素 D に対して、任意の $t > 0$ で

$$\mathrm{Str}(\exp(-tD^2)) = \int_X \hat{A}(TX)$$

という形で書かれます。ここで Str は supertrace と呼ばれるもので、大雑把には微分方程式 $Df = 0$ の解空間の次元を測っています。一方で右辺は X の幾何を反映する特性類と呼ばれる量で、穴の数のような情報を表しています。これは、微分方程式を具体的に解かなくても、その方程式が置かれている空間の形から解の自由度に関する情報を取り出せる、という意味で非常に強力です。この定理は微分幾何、位相幾何、解析学をつなぐ基本的な橋渡しになっていて、現代数学の多くの分野に影響を与えています。

非可換幾何の立場から見ると、この指数定理は cyclic cohomology と K 理論のペアリングを計算しているものだと見ることができます。まず微分作用素 D は、前回の報告書で紹介した K 理論の元を定めます。一方で、supertrace は cyclic cohomology の元として理解されます。すると、指数定理は「cyclic cohomology の元」と「 K 理論の元」をペアリングすると幾何的な量が得られる、という枠組みで理解することができます。

* email: h.sasaki[at]wustl.edu

このような抽象的な見方をするメリットは、定理をより抽象化した設定で捉えておくことで別の状況にも応用しやすくなることです。例えば現在の僕の研究では、通常の図形ではなく、図形が葉と呼ばれる部分集合に分割された葉層という対象を考えています。このように図形に付加的な構造を入れると、

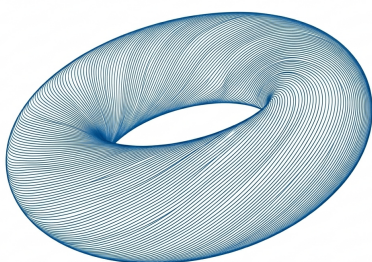


図1 ドーナツ上の葉層の例

対応する代数が非可換になるので、これは非可換幾何の自然な対象になります。典型的な問題としては、上の「cyclic cohomology の元」と「 K 理論の元」のペアリング＝「幾何的な量」という対応で、「 K 理論の元」を微分作用素、「幾何的な量」を葉の入り方の複雑さとしたときに、対応する「cyclic cohomology の元」をどのように定義すればよいか、というものがあります。僕の研究では、Lie 群と呼ばれる対称性のある特別な図形上の葉層に対して、関連した問題を考えています。

2.2 研究集会など

去年の10月に研究集会でプエルトリコに行きました。プエルトリコはカリブ海の島で、アメリカ合衆国の自治領、いわゆるコモンウェルスと呼ばれる地域です。アメリカからは飛行機で5-8時間くらいで行けます。

研究集会では自分の先生とたくさん議論、雑談ができて非常に有意義な会でした。日本よりアメリカの方がこういった研究集会にアクセスしやすい傾向にあるので、そういう点でやはりアメリカに来て良かったなと思います。あと初めてのカリブ海がめちゃくちゃ綺麗で感動しました。



図2 プエルトリコで見たカリブ海

2.3 AI との関わり

また最近の研究生活に関わる大きな変化としては、AI と数学研究の関わりがあると思います。正直なところ AI が数学の研究に関して調べ物以上に役に立った経験があまりなく、まだまだ AI を本質的に研究に活用できる時期は来ないと高を括っていたのですが、あるとき指導教官に最新の推論モデルは今までと段違いにすごいから一度試すべきだと言われ試したところ、そのとき1週間くらい困っていた問題がすぐに解けてしまってびっくりしました。少なくとも与えられた問題を解くという点については遅かれ早かれ AI に代替される日が来得るとというのが数学者の中でもよくある見方になっており、その中で数学者の役割がどうなるのか、ということは数学をする上で避けられない問題だと思います。せっかく大学院生という将来の数学との関わりを決めるタイミングと AI の進化のタイミングが重なったわけですから、色々なことを試して自分なりの結論を出さなければな、と思っています。

3 生活について

セントルイスでの生活は前回書いたことから大きな変化があるわけではないのですが、一つ驚いたのは、住んでいる部屋にネズミが出たことです。僕は Toronto で1ヶ月 Airbnb を借りていた時にもネズミに遭遇した経験があったのですが、とはいえ嫌なものは嫌です。ネズミ取りを設置したら合計で5匹

くらい捕まってびっくりしました。まあ北米の古いアパートというのはそういうものらしいですが。

ルームメイトは僕よりもっと嫌がっていて、2人で相談した結果引っ越しをすることにしました。2人とも1人用の部屋を無事見つけることができたので、来学期からは1人暮らしです。この報告書を書きながら引っ越しの作業をしています。

他に日本とアメリカで文化の違いを感じるのは、郵便の正確性です。これまでもアメリカで郵便が届かなかったりして困ったことは何度もありますが、一番生活に影響が出るのは確定申告です。僕はなぜかWEB申告ができならしく、郵送で申告書を送る必要があるのですが、去年と今年、2年連続で郵便側のミスで申告書の提出が遅れて困りました。1年目は郵便局の窓口で封筒の重さを測ってもらい切手を貼ってもらったのですが、それが間違っていて切手の金額が不足返送。2年目は出した封筒が何の印もなく返送されてきました。幸い、1年目は収入額が少なく税金が掛からなかったので延滞金もゼロ、2年目は間違えて返送されてきたので切手のタイムスタンプがまだ有効でそれをもう一度発送することでセーフ、という感じで首の皮一枚繋がっているのですが、胃に悪いのでやめて欲しいところです。

また先日、日本でいうゴールデンウィークのタイミングでカーディナルスとドジャースの試合がセントルイスであったので、父が友人とセントルイスまで野球を見にきました。個人的にも野球は好きなので楽しかったです。大谷選手の日本代表ユニフォームを着ていたら色々な人から話しかけられました。彼が3日間ノーヒットだったのは残念でした。

せっかく父が来たので、新しいBBQのお店を開拓したり Budweiser のビール工場の見学にも行ったりしました。2年弱住んでいてもこういう観光は誰かの案内でもないとなかなか行かないタイプなので、新しい場所に色々行けて楽しかったです。

4 終わりに

引き続き楽しく留学生活を送っており、特に研究面ではようやく自分の結果だと言えるようなものが



図3 Busch Stadiumでの野球観戦

できてきたところです。豊田理研の皆様には、継続的なご支援をいただき心より感謝申し上げます。