第 4 回豊田理研懇話会報告

「数学の研究と醍醐味について」「abc 予想について」

森重文[1], 山下剛[2]

0 はじめに.

本稿は第 4 回豊田理研懇話会 (2013 年 5 月 6 日) の報告である. 懇話会では「数学の研究と醍醐味について」という題で第 1 著者 (森) が, 「abc 予想について」という題で第 2 著者 (山下) が非専門家向けの講演を行った. 以下, 第 1 節で前者について第 2 節で後者について講演内容の概要を述べる. 懇話会の報告書という都合上, 両講演を 1 つの記事にまとめることになった. なお, 本稿は第 2 著者が書いた. 第 1 節の内容について不正確な点などがあればその責任はすべて第 2 著者にある.

1 第 1 講演「数学の研究と醍醐味について」.

第 1 講演は以下の構成をとった：

1. そもそも数学は必要か？
2. 数学とは何か？
3. 数学は役に立つ？
4. 数学研究について.

1.1 「そもそも数学は必要か？」

まず, 自動車を例にとって７０～８０年代以降コンピュータ制御が始まり, 現代ではハイブリッド車・電気自動車などのコンピュータの役割がますます高まったこと及びコンピュータ制御の中身についても CPU に特化した機械語から汎用プログラム言語に時代が移ったことなど, 数理科学の役割が増大していることを説明した.

次に「コンピュータですべて計算できるのではないか？」つまりコンピュータがあれば「数学」を研究する必要がないのではないかという “極端な” 疑問を出し, アルゴリズムを作ることやアルゴリズムを改良することは理論を研究することによって生まれるということ及び近似の誤差評価やそもそも解が存在するか否かを知るためにも理論が必要である, とその “極端な” 疑問に (具体例を交えて) 答えることで数学を研究することの必要性を浮かび上がらせた.

1.2 「数学とは何か？」

まず, 日本語では「数学」は文字を見ると「数の学問」であるかのような誤解を与えるが, 数を研究する分野 (数論) は数学の中の 1 分野であり, 数以外を研究対象にする数学の分野もあることを述べ, 英語の「mathematics」はギリシャ語の「学ぶこと」に由来しているので, 日本語で「数学」と聞いたときの印象と英語を母語にもつ人が「mathematics」と聞いたときの印象は違うのではないか, ということを指摘した.

次に, 数学は真理へ至る 4 つの道を指し「算術」は数を「幾何」は形を「音楽」は調和を「天文学」は神々の営みをそれぞれ解明する, という山口佳三氏 (北海道大学) による説を紹介し, 一

[1]京都大学数理解析研究所
[2](株) 豊田中央研究所/京都大学数理解析研究所

つの方法だけが真理に至る道ではないことを述べた. そして, 数学に (大きな) 分野として「代数」「幾何」「解析」の３分野があることを (より深い歴史には踏み込まず) 歴史を念頭に次のように紹介した. 初等数学において学ぶ「式の計算」や「方程式」は１６世紀のインド・アラビア数字に起源をもつ「代数」という分野になった. 代数の現在の便利な記法に至るまで人類は長い時間がかかったことも具体例を挙げて述べた. 初等数学において学ぶ「平面図形」や「空間図形」は紀元前 4 世紀のユークリッドの原論や１７世紀のデカルトによる座標の導入に起源をもつ「幾何」という分野になった. 初等数学において学ぶ「関数」や「確率・統計」は１７世紀のニュートン・ライプニッツによる微積分に起源をもつ「解析」という分野になった. そして, これらの分野は無関係ではなく密接に結びついていること (一つの方法だけが真理に至る道ではないこと) を, 例えばポワンカレ予想は「幾何」の予想だけれどもペレルマンの証明は「解析」の手法をふんだんに使ったことや, 自分自身も「幾何」のある問題を「代数」を使って解決し, その後別の人が「解析」を使って別証明を与えたことなど例を挙げて説明した.

1.3 「数学は役に立つ？」

応用は数学という樹木に実る果実であるという言葉を紹介し, 果実をとることにばかり目がいくと樹木が育たないこと, いわゆる「純粋」系の研究をするということはこの先数十年数百年単位で人類の未来のために今「種蒔き」をしていることにあたる, と説明した.

次に「代数」「幾何」「解析」でそれぞれ実際にどのように現実世界で役に立っているのかの例を次のように紹介した. 「代数」では有限体上での代数幾何学を用いると情報を信号で送るときの誤り訂正符号における効率の良い符号ができることを紹介し, もともと有限体も有限体上での代数幾何学もいわゆる「純粋」系の研究者によって応用を念頭に置かない純粋な理論的興味から生まれたものであるが, それが数百年後に現実に役立つ技術に応用されたということを注意した. 「幾何」[3]ではリーマン幾何学が一般相対性理論を記述する言語を与えた. 現在 GPS による位置認識は一般相対性理論的効果を考慮に入れないと１日概算で１２キロメートルずれる. 「解析」ではフーリエ変換の理論により, 医療機器の MRI の原理を説明した. 他にも, 「代数」では RSA 暗号, 「幾何」では DNA の結び目の記述, 「解析」では金融商品のデリバティブの価格計算 (確率微分方程式を考案した伊藤清氏 (京都大学) は「ウォール街で最も有名な日本人」と呼ばれている) など枚挙に暇がない.

1.4 「数学研究について」

まず角の３等分問題や円積問題, ミレニアム問題などの数学の問題や予想の具体例について軽く触れた. 次に「数学の研究成果」について, 定理は一旦確立したらずっと定理のまま残ること, 工学分野で言えば「新手法の発見」に相当すると言うこともでき, 論文の引用寿命も数十年は普通で百年を超えて引用される論文もあることを指摘した. 「数学研究のなされ方」について, 実験系とは異なりどんな大問題も１人で取り組むことが可能であることを述べ, 研究対象は人から見えず, 理解者及び共同研究者の重要性についても指摘した.

最後に「アイデアを求める姿勢」について 1. 工業デザインと数学的アイデア 2. 印象派絵画と代数幾何, の間の類似性を以下のように指摘した. 前者では, 建築家フラーの**「デザインの美は直接求めるものでなく, 問題解決の結果として得られる」**及び「問題の解決に向けて励んでいるとき美感など意識したことがない. しかし, 作業の後で, 解答が美しくなかったらどこかお

[3]実際の講演では時間の都合上この部分は省略した.

かしいことを私は知っている」, 数学者ヴェイユの (数学のアイデアとは何かという質問に対する答えとして) **「数学のアイデアは定義出来ないが, 論文の中で見ればわかる」** (アイデアはどんな人に浮かぶのかという質問に対する答えとして) 「アイデアなしで研究を続けられる人だ」という言葉を引用して説明した. 後者は, 「光」を描こうと試みた画家モネが「光」を直接描くことはできないので朝光の大聖堂, 曇りの日の大聖堂, 日没の大聖堂のように色々な状況下での大聖堂を描くことで間接的に「光」を描くことをした, ということと数学者グロタンディークによって得られた概型 (スキーム) がアイデアとして似ている, ということを説明した.

2 第 2 講演「abc 予想について」.

第 2 講演は以下の構成をとった：

1. abc 予想の "感覚的な" 理解,
2. abc 予想の正確な主張,
3. abc 予想の強力さ,
4. 望月新一氏の証明の方針.

2.1 abc 予想の "感覚的な" 理解.

本講演は非専門家向けであるため, "感じをつかんでもらう" ことを優先して abc 予想の主張の意味するところを感覚的に説明することから始めた. まず, **整数の間の「足し算」と「掛け算」の間の関係は極めて複雑である**ことを次のように説明した. 紀元前から知られているように, 任意の自然数は素数の積の形に一意的に表せるため, 素数は掛け算について "原子" のようなものと思える. そこで整数 a と b の両者の素因子 (つまり掛け算についての情報) が分かっていても, 足し算をした $a+b$ の素因子がどうなるのか (専門家でも) よく分からない. つまり, **「足し算」をすると「掛け算」についての情報がどう変化するのか**よく分からない. 具体例を挙げると, 整数 2^n と -1 は, それぞれ「2 を n 回掛けた数」「素因子のない数」として掛け算の視点での情報はよく分かっているものである. ところが, それを足した 2^n-1 がいつ素数になるのかも分からないし, まして素因子なども分からない. 2^n-1 が素数になるときメルセンヌ素数と呼ばれる. メルセンヌ素数が有限個か無限個かも未解決の問題である (因みに 2013 年 1 月に分散コンピューティングにより 48 個目のメルセンヌ素数が発見された).

「足し算をすると掛け算の情報がどう変化するのかよく分からない」ということについて具体的な計算で説明したあと, abc 予想の "感覚的な" 理解として, 「足し算」と「掛け算」の間にある複雑な関係の深い奥にある, ある種の規則性を定式化したものである, と説明した. 補足として, 足し算した数の素因数分解が厳密に予言できるのではなく, (適切な意味で有限個の例外を除いて) 素因数分解の形が限定されてくる, という主張であると説明した.

2.2 abc 予想の正確な主張.

オエステルレとマッサーによって定式化された abc 予想の主張は以下の通り: 「任意の正の実数 $\epsilon > 0$ に対して $a+b=c$ を満たす互いに素な整数の 3 つ組 (a,b,c) は有限個の組を除いて

$$\max(|a|,|b|,|c|) \leq (abc\text{ を割る素数の (1 乗の) 積})^{1+\epsilon}$$

を満たす.」ここで, 「任意の正の実数 $\epsilon > 0$」云々は右辺の括弧の中をちょっとだけ大きくしている, という気持ちである. こういう表現に慣れていない人は, 感覚的に理解するためにはだい

たい右辺の $(1+\epsilon)$ 乗は無視して構わない (素朴に $\epsilon=0$ とすると反例があるので補正をしているという気持ちである). ここで, a, b, c の 3 つともがそれぞれ何か素数の高い冪で割り切れていると, 右辺は非常に小さくなるため, その不等式を満たさない例外的な 3 つ組になりやすい. 予想の主張は, そのような例外的な 3 つ組は有限個しかない, つまり a, b, c の 3 つともがそれぞれ何か素数の高い冪で割り切れるようなことは有限個の例外しか起きないだろう, ということであり, これが前節で「(適切な意味で有限個の例外を除いて) 素因数分解の形が限定されてくる」と説明したことである.

2.3 abc 予想の強力さ.

「(適切な意味で有限個の例外を除いて) 素因数分解の形が限定されてくる」という主張を聞くと, 例外を許す上に素因数分解をはっきり予言できるわけではなく形が限定されてくる, ということで控えめな主張のように感じることもできるが, これは非常に強い主張でることを説明した. 具体的には, 有限個の指数を除くフェルマー予想が abc 予想から容易に示されることを説明し, 他にもロスの定理, モーデル予想 (ファルティングスの定理), シュピロ予想 (未解決), 曲線の場合のヴォイタ予想 (未解決) などのディオファントス問題において重要かつ深遠な定理・予想が abc 予想から導けることを説明した.

2.4 望月新一氏の証明の方針.

望月新一氏 (京都大学数理解析研究所) によってアナウンスされた証明の方針を大雑把に (非専門家向けに) 説明した. 詳細は本稿では割愛する.
注：本稿を執筆時点 (2013 年 6 月) で望月新一氏の論文は詳細の点検が完了したというニュースは未だ耳にしていない. 豊田理研懇話会において望月新一氏によってアナウンスされた証明の方針を説明したことは, **2013 年 6 月現在においてその証明の正しさの主張や保証をするものではない.**

全体のまとめ.

第 1 著者による最初の講演において, 豊富な具体例で (1) 近年数学及び数理科学の重要性はますます高まっていること (2) 数学には (大きな) 分野として「代数」「幾何」「解析」がありそれらは互いに関係しあっていること (3) 符号・暗号・MRI・GPS・デリバティブなど数学及び数理科学は実生活に極めて役立っていること (4) 数学の研究においては他の分野, 例えば印象派絵画の間にも (アイデアの) 類似性があることなどを説明した.

第 2 著者による 2 番目の講演では, abc 予想について (1)abc 予想は「足し算」と「掛け算」の間にある奥深い関係性を表すこと (2)abc 予想は強力な主張でありそれから重要かつ深い定理や予想が従うこと (3) 望月新一氏がアナウンスした証明が正しければその新手法は今後非常に重要になるだろうことを説明した.